ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

concours d'élève titulaire de l'ENSAI
concours externe d'attaché de l'INSEE

Option **A. - MATHÉMATIQUES**

MAI 1995

deuxième composition de mathématiques

DURÉE : 4 heures

Le sujet comprend 3 pages.

Notons G l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$, où α et β varient dans $\mathbb{C}$ en restant astreints à vérifier $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Posons $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

et notons $H = \{xU + yJ + zK + t\mathbb{1} \mid (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\}$,

puis pour $h = xU + yJ + zK + t\mathbb{1}$, notons $h^* = -h + 2t\mathbb{1}$.

Dans toute la suite du problème, dét h désignera le déterminant de la matrice h, et le symbole $\wedge$ désignera le produit vectoriel.

On notera $\mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$ l'ensemble des endomorphismes du plan vectoriel $\mathbb{C}^2$.

Le but de ce problème est d'exhiber un isomorphisme entre le troisième groupe spécial orthogonal et le deuxième groupe spécial unitaire (quotienté par son centre), en faisant opérer ce dernier sur des quaternions.

Lors des trois premières parties, chaque question pourra être traitée en admettant les résultats des questions précédentes.

A

1. Montrer que G (muni du produit matriciel) est un groupe, et qu'il est infini ; G est-il commutatif ?

2. Vérifier que $h \mapsto h^*$ est un automorphisme de l'espace vectoriel réel H, et, pour h_1 et h_2 dans H, exprimer $(h_1\, h_2)^*$ en fonction de h_1^* et h_2^*.

3. Montrer que $\| h \| = \sqrt{\det h}$ définit sur H une norme, rendant H isométrique à l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^4$; comparer $\| h \|$ avec hh^* et h^*h.

4. Vérifier que $(H, +, \times)$ est un corps, non commutatif.

5. Vérifier que $G = \{ h \in H \mid \|h\| = 1 \} = \{ h \in H \mid h^* = h^{-1} \}$, et que la norme de H rend par restriction G isométrique à une sphère de $\mathbb{R}^4$ euclidien.

   G est-il compact ?

6. $\mathbb{C}^2$ étant muni de sa base canonique et de son produit scalaire hermitien canonique, vérifier que $g \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ est une isométrie de déterminant 1 si et seulement si sa matrice est dans G.

7. Montrer que :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix} \;\middle|\; (\varphi, \theta, \psi) \in \mathbb{R} \times [0, \pi] \times \mathbb{R} \right\}.$$

B

Notons $H_0 = \{ h \in H \mid h^* + h = 0 \}$, qu'on munit de la restriction de la norme de H.

Pour $v \in H_0$ et $h \in G$, on pose $T(h)(v) = h\, v\, h^{-1}$.

1. Montrer que $T(h)$ est une isométrie de H_0.

2. Montrer que T est un morphisme de groupes.

3. Déterminer le noyau $T^{-1}(\{Id\})$ de T.

4. Vérifier que $\mathcal{B} = \{U, J, K\}$ est une base orthonormée de H_0.

5. Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de $T\left(\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right) \mathbb{1} + \left(\sin\frac{\varphi}{2}\right) K\right)$.

6. Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de $T\left(\left(\cos\frac{\theta}{2}\right) \mathbb{1} + \left(\sin\frac{\theta}{2}\right) U\right)$.

C

Fixons une base $\beta_1 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté, et un élément ρ de SO_3 ;

notons $\vec{i}' = \rho(\vec{i})$, $\vec{j}' = \rho(\vec{j})$ et $\vec{k}' = \rho(\vec{k})$, puis $\vec{e} = \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{k}'}{\| \vec{k} \wedge \vec{k}' \|}$ (si $\vec{k} \wedge \vec{k}' = \vec{0}$, on prend $\vec{e}$ normé quelconque orthogonal à $\vec{k}$) ;

soient β_2 et β_3 les bases orthonormées directes de premier vecteur $\vec{e}$ et de dernier vecteur $\vec{k}$ et $\vec{k}'$ respectivement ;

notons ρ_1 la rotation d'axe dirigé par $\vec{k}$ et d'angle $\varphi = \widehat{(\vec{i}, \vec{e})}$,

ρ_2 la rotation d'axe dirigé par $\vec{e}$ et d'angle $\theta = \widehat{(\vec{k}, \vec{k}')}$,

et ρ_3 la rotation d'axe dirigé par $\vec{k}'$ et d'angle $\psi = \widehat{(\vec{e}, \vec{i}')}$.

1. Faire un dessin représentant β_1, $\vec{e}$, $\rho(\beta_1)$, φ, θ, ψ, et vérifier que θ peut être pris dans $[0, \pi]$.

2. Écrire les matrices $M_{\beta_1}(\rho_1)$, $M_{\beta_2}(\rho_2)$ et $M_{\beta_3}(\rho_3)$, où $M_{\beta_i}(\rho_i)$ désigne la matrice dans la base β_i de l'endomorphisme ρ_i.

3. Exprimer ρ à l'aide de ρ_1, ρ_2 et ρ_3.

4. Exprimer $M_{\beta_1}(\rho)$ à l'aide de $M_{\beta_1}(\rho_1)$, $M_{\beta_2}(\rho_2)$ et $M_{\beta_3}(\rho_3)$.

D

On identifie, pour les questions 1. et 2., $\mathbb{R}^3$ vectoriel euclidien et H_0 via l'isométrie :

$$(x, y, z) \mapsto xU + yJ + zK .$$

1. Déduire de **A**, **B** et **C** quelle est l'image de G par T.

2. Pour tout h de G, soit $h' = \{h, -h\}$; soit $G' = \{h' \mid h \in G\}$; posons $h'_1 * h'_2 = (h_1 h_2)'$ et $T'(h') = T(h)$; vérifier que $(G', *)$ est un groupe et que T' est un isomorphisme de G' sur $T(G)$.

3. Soient $\| \ \|$ une norme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que la série :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\| M^n \|}{n!}$$

est convergente.

En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{M^n}{n!} = \exp(M)$ converge dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

4. Calculer l'exponentielle $\exp(v)$ d'un élément générique v de H_0, puis montrer que $\exp(H_0) = G$.